

K-ALJABAR

Iswati¹ dan Suryoto²

^{1,2}Jurusan Matematika FMIPA UNDIP

Jl. Prof. H. Soedarto, S.H, Semarang 50275

Abstract. K -algebra is an algebra structure built on a group so that characters of a group will apply also at K -algebra. If at group there is subgroup and homomorphism group, hence at K -algebra there is K -subalgebra and K -homomorphism. By using characters of group, will be proved characters applied at K -algebra.

Keyword : algebra, group, subgroup, and homomorphism group.

1. PENDAHULUAN

Struktur aljabar merupakan himpunan yang tidak kosong dengan paling sedikit sebuah relasi ekuivalensi, satu atau lebih operasi biner dan aksioma-aksioma yang berlaku kemudian akan membentuk suatu sistem baru. Salah satu struktur aljabar tersebut adalah K -aljabar.

Misalkan $G = (G, *)$ suatu grup terhadap operasi biner $*$. Jika e adalah unsur identitas pada G dan untuk setiap x, y di G didefinisikan operasi

$$x \odot y = x * y^{-1} \quad \text{sedemikian sehingga}$$

operasi tersebut merupakan operasi biner dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu maka akan membentuk struktur aljabar baru yang dinamakan K aljabar.

K -aljabar mempunyai sifat yang hampir sama dengan grup. Hal ini dapat dilihat dari grup yang mempunyai konsep subgrup dan homomorfisma grup. Sedangkan pada K -aljabar terdapat konsep K -subaljabar dan homomorfisma pada K -aljabar yang disebut K -homomorfisma.

2. K-ALJABAR

Pada bagian ini akan dibahas mengenai K -aljabar, K -subaljabar, dan K -homomorfisma.

2.1 K -Aljabar

Berikut ini akan diberikan definisi dan contoh dari K -aljabar.

Definisi 2.1.1 [1] Misalkan $(G, *)$ suatu

grup dan pada G didefinisikan operasi \odot

sedemikian hingga $\forall x, y \in G, x \odot y = x * y^{-1}$

maka akan membentuk struktur aljabar baru yaitu $(G, *, \odot, e)$. Suatu $(G, *, \odot, e)$

dinamakan K -aljabar, jika G adalah bukan

grup dengan order-2 dan $\forall x, y, z \in G$

berlaku :

$$1. (x \odot y) \odot (x \odot z)$$

$$= (x \odot ((e \odot z) \odot (e \odot y))) \odot x$$

$$2. x \odot (x \odot y) = (x \odot (e \odot y)) \odot x$$

$$3. x \odot x = e$$

$$4. x \odot e = x$$

$$5. e \odot x = x^{-1}, \quad \forall x, y, z \in G$$

Jika grup $(G, *)$ merupakan grup komutatif,

maka aksioma 1 dan 2 menjadi :

$$1'. (x \odot y) \odot (x \odot z) = z \odot y$$

$$2'. x \odot (x \odot y) = y$$

Contoh 1

$G = \{-t, t, 1, -1\}$ terhadap operasi

pergandaan merupakan grup, lebih tepatnya merupakan grup siklik dengan generator t . Jika pada G dilengkapi dengan

operasi \odot , sebagaimana (seperti) diberikan

tabel berikut :

\odot	$-t$	t	1	-1
$-t$	1	-1	$-t$	t
t	-1	1	t	$-t$
1	t	$-t$	1	-1
-1	$-t$	t	-1	1

Tabel 2.1.1 operasi \odot pada G

Maka (G, \cdot, \odot, e) membentuk K -aljabar.

Hal ini dapat dilihat dari tabel bahwa aksioma 1 sampai 5 dipenuhi oleh G .

Contoh 2

$S_3 = \{e, a, b, x, y, z\}$, dengan $e = (1)$, $a =$

$(1\ 2\ 3)$, $b = (1\ 3\ 2)$, $x = (1\ 2)$, $y = (1\ 3)$,

$z = (2\ 3)$ terhadap operasi komposisi

fungsi (S_3, \circ) membentuk grup, lebih

tepatnya merupakan grup permutasi. Jika pada S_3 dilengkapi dengan operasi \odot ,

sebagaimana (seperti) diberikan oleh tabel berikut :

\odot	e	x	y	z	a	b

e	e	x	y	z	b	a
x	x	e	a	b	z	y
y	y	b	e	a	x	z
z	z	a	b	e	y	x
a	a	z	x	y	e	b
b	b	y	z	x	a	e

Tabel 2.1.2 operasi \odot pada S_3

maka (S_3, \circ, \odot, e) membentuk K -aljabar.

Hal ini dapat dilihat dari tabel, bahwa aksioma 1 sampai 5 dari K -aljabar

dipenuhi oleh S_3 .

Selanjutnya akan ditinjau sifat dari K -aljabar $(G, *, \odot, e)$, jika G

merupakan grup komutatif.

Proposisi 2.1.1 [2] Misalkan $(G, *)$ grup

komutatif. Jika $(G, *, \odot, e)$ adalah suatu K -

aljabar, maka $\forall x, y, z \in G$ berlaku :

1. $(e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x = e \odot (x \odot y)$
2. $(x \odot z) \odot (y \odot z) = x \odot y$
3. $e \odot (e \odot x) = x$
4. $x \odot (e \odot y) = y \odot (e \odot x)$

Bukti – bukti :

Diambil sebarang unsur $x, y, z \in G$ dan

misalkan e unsur identitas dari G , maka :

$$1. (e \odot x) \odot (e \odot y)$$

$$= x^{-1} \odot y^{-1}$$

$$= x^{-1} * y$$

$$= y * x^{-1}$$

$$= y \odot x$$

$$(e \odot x) \odot (e \odot y)$$

$$= (e \odot ((e \odot y) \odot (e \odot x))) \odot e$$

$$= (e \odot (y^{-1} \odot x^{-1})) \odot e$$

$$= e \odot (y^{-1} \odot x^{-1})$$

$$= e \odot (y^{-1} * x)$$

$$= e \odot (x * y^{-1})$$

$$= e \odot (x \odot y)$$

$$\text{Karena } (e \odot x) \odot (e \odot y) = y \odot x$$

dan

$$(e \odot x) \odot (e \odot y) = e \odot (x \odot y)$$

$$\text{maka } y \odot x = e \odot (x \odot y).$$

$$2. (x \odot z) \odot (y \odot z) =$$

$$(x \odot z) * (y \odot z)^{-1}$$

$$= (x * z^{-1}) * (y * z^{-1})^{-1}$$

$$= (x * z^{-1}) * (z * y^{-1})$$

$$= (x * (z^{-1} * z)) * y^{-1}$$

$$= (x * e) * y^{-1}$$

$$= x * y^{-1}$$

$$= x \odot y$$

$$3. e \odot (e \odot x) = e \odot x^{-1}$$

$$= e * x$$

$$= x$$

$$4. x \odot (e \odot y) = x \odot y^{-1}$$

$$= x * y$$

$$= y \odot x^{-1}$$

$$= y \odot (e \odot x) \quad \blacksquare$$

Jika operasi \odot pada $(G, *, \odot, e)$

bersifat komutatif, maka K -aljabar

$(G, *, \odot, e)$ bersifat komutatif, sebagaimana

diberikan oleh definisi berikut :

Definisi 2.1.2 [1] Suatu K -aljabar

$(G, *, \odot, e)$ dikatakan komutatif jika

$$\forall x, g \in G \text{ berlaku } g \odot (e \odot x) = x \odot (e \odot g).$$

Contoh 3

Berdasarkan **Contoh 1** diketahui bahwa $G = \{-1, 1, -1\}$ terhadap operasi

perkalian merupakan K -aljabar.

Berdasarkan tabel 2.1.1 dapat dilihat bahwa **Definisi 2.1.2** dipenuhi, sehingga $(G, *, \odot, e)$ merupakan K -aljabar yang komutatif.

Proposisi 2.1.2 [1] Suatu K -aljabar

$(G, *, \odot, e)$ dikatakan komutatif jika dan

hanya jika $e \odot x = x$.

Bukti :

(\Rightarrow) Misalkan $(G, *, \odot, e)$ komutatif terhadap operasi \odot . Akan ditunjukkan $e \odot x = x$. Diambil sebarang unsur $x, g \in G$, karena $(G, *, \odot, e)$ suatu K -aljabar yang komutatif, maka :

$$g \odot (e \odot x) = x \odot (e \odot g)$$

$$= x \odot (g \odot e)$$

$$= x \odot g$$

$$= g \odot x$$

Karena $g \odot (e \odot x) = g \odot x$, maka $(e \odot x) = x$.

\Leftarrow Misalkan $e \odot x = x$. Menurut definisi operasi $\odot, e \odot x = x^{-1}$ sehingga diperoleh $x = x^{-1}$. Akan ditunjukkan bahwa $(G, *, \odot, e)$ suatu K -aljabar yang komutatif. Diambil sebarang unsur $x, g \in G$, maka :

$$g \odot (e \odot x) = g \odot x$$

$$= g \odot x^{-1}$$

$$= g * x$$

$$= x * g$$

$$= x * (e * g^{-1})^{-1}$$

$$= x \odot (e \odot g)$$

Karena $g \odot (e \odot x) = x \odot (e \odot g)$, maka $(G, *, \odot, e)$ suatu K -aljabar yang komutatif. ■

Selanjutnya akan ditinjau sifat dari K -aljabar $(G, *, \odot, e)$, jika G tidak komutatif.

Proposisi 2.1.3 [1] Misalkan $(G, *, \odot, e)$ suatu K -aljabar. Jika $(G, *)$ tidak komutatif, maka $\forall x, y, z, u, v \in G$ berlaku:

$$1. (x \odot y) \odot (u \odot v) =$$

$$(x \odot (e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$$

$$2. (x \odot y) \odot z = x \odot (z \odot (e \odot y))$$

$$3. e \odot (e \odot x) = x$$

$$e \odot (x \odot y) = y \odot x = (e \odot x) \odot (e \odot y)$$

$$4. e \odot (x \odot y) = (x \odot y)^{-1}$$

$$5. x \odot y = e \text{ jika dan hanya jika } x = y$$

Bukti – bukti :

Diambil sebarang unsur $x, y, z, u, v \in G$

dan misalkan e unsur identitas dari G ,

maka :

$$1. (x \odot y) \odot (u \odot v)$$

$$= (x * y^{-1}) \odot (u * v^{-1})$$

$$= (x * y^{-1}) * (u * v^{-1})^{-1}$$

$$= (x * y^{-1}) * (v * u^{-1})$$

$$= (x * y^{-1} * v) * u^{-1}$$

$$= (x * (v^{-1} * y)^{-1}) * u^{-1}$$

$$= (x \odot (v^{-1} \odot y^{-1})) \odot u$$

$$= (x \odot (e \odot v) \odot (e \odot y)) \odot u$$

$$2. (x \odot y) \odot z = (x * y^{-1}) * z^{-1}$$

$$= x * (y^{-1} * z^{-1})$$

$$= x * (z * y)^{-1}$$

$$= x \odot (z \odot y^{-1})$$

$$= x \odot (z \odot (e \odot y))$$

$$3. e \odot (e \odot x) = (e \odot x)^{-1}$$

$$= (e * x^{-1})^{-1}$$

$$= x$$

$$4. e \odot (x \odot y) = (x \odot y)^{-1}$$

$$= (x * y^{-1})^{-1}$$

$$= y \odot x$$

5. (\Rightarrow) Diketahui $x \odot y = e$, akan

dibuktikan $x = y$. Diambil sebarang unsur

$x, y \in G$ dan berlaku $x \odot y = e$. Karena

$y \in G$ dan $y^{-1} \in G$ sehingga :

$$(x \odot y) \odot y^{-1} = e \odot y^{-1}$$

$$(x * y^{-1}) * y = e * y$$

$$x * (y^{-1} * y) = e * y$$

$$x * e = e * y$$

$$x = y$$

(\Leftarrow) Diketahui $x = y$, akan dibuktikan

bahwa $x \odot y = e$

Diambil sebarang unsur $x, y \in G$,

dengan $x = y$, maka

$$x \odot y = y \odot y$$

$$x \odot y = e$$

■

Diantara himpunan bagian – himpunan bagian dari K -aljabar ada yang memiliki sifat K -aljabar terhadap operasi biner yang sama yang dinamakan K -subaljabar. Berikut ini akan dibahas mengenai K -subaljabar.

2.2 K -Subaljabar

Berikut ini akan diberikan definisi dan contoh dari K -subaljabar.

Definisi 2.2.1 [1] Suatu himpunan bagian tidak kosong H dari K -aljabar $(G, *, \odot, e)$

disebut K -subaljabar jika :

$$1. e \in H$$

$$2. h_1 \odot h_2 \in H, \forall h_1, h_2 \in H$$

Contoh 4

Berdasarkan **Contoh 3** diketahui bahwa (S_3, \circ, \odot, e) merupakan K -aljabar. Ditinjau

himpunan $A_3 = \{e, a, b\}$ yang merupakan

himpunan bagian dari S_3 . Operasi \odot pada

A_3 diberikan oleh tabel berikut :

\odot	e	a	b
e	e	b	a
a	a	e	b

b	b	a	e
-----	-----	-----	-----

Tabel 2.2.1 operasi \odot pada A_3

Sehingga karena dipenuhi :

1. $A_3 = \{e, a, b\}$ maka $e \in A_3$
2. Dari tabel terlihat bahwa \odot merupakan operasi biner pada A_3 .

maka (A_3, \odot, e) merupakan K -subaljabar dari (S_3, \odot, e) .

Selanjutnya akan ditinjau keterkaitan antara subgrup dengan K subaljabar, sebagaimana diberikan oleh

proposisi berikut :

Proposisi 2.2.1 [1] Misalkan $(G, *, \odot, e)$

adalah suatu K -aljabar dan $g \in G$. Jika H suatu subgrup dari G . Maka

$H_g^z = \{g \odot (g \odot x) : x \in H\}$ adalah

suatu K -subaljabar dari $(G, *, \odot, e)$.

Bukti – bukti :

1. Akan ditunjukkan $e \in H_g^z$. Misalkan e

unsur identitas dari G dan $g \in G$, karena

H subgrup dari G , maka $e \in H$ dan

berlaku :

$$e = e * e = (g * g^{-1}) * e$$

$$= g * (g^{-1} * e)$$

$$= g * (e * g)^{-1}$$

$$= g \odot (e * g)$$

$$= g \odot (g * e)$$

$$= g \odot (g \odot e) \in H_g^z.$$

2. Diambil sebarang unsur $x, y \in H_g^z$,

dapat dituliskan $x = g \odot (g \odot u)$ dan

$y = g \odot (g \odot v)$ untuk suatu

$u, v \in H$, maka :

$$x \odot y$$

$$= (g \odot (g \odot u)) \odot (g \odot (g \odot v))$$

$$= (g \odot ((e \odot v) \odot (e \odot u))) \odot g$$

$$= (g \odot (e \odot (v \odot u))) \odot g$$

$$= (g \odot (u \odot v)) \odot g$$

$$= g \odot (g \odot (e \odot (u \odot v)))$$

$$= g \odot (g \odot (v \odot u)) \in H_g^z$$

Jadi terbukti bahwa

$H_g^z = \{g \odot (g \odot x) : x \in H\}$ adalah

suatu K -subaljabar dari $(G, *, \odot, e)$ ■

Proposisi 2.2.2 [1] Misalkan H_1 dan H_2

merupakan K -subaljabar dari suatu K -aljabar $(G, *, \odot, e)$ maka :

1. $H_1 \cap H_2$ adalah K -subaljabar dari $(G, *, \odot, e)$.

2. $H_1 \odot H_2$ adalah K -subaljabar dari

$(G, *, \odot, e)$ jika dan hanya jika

$$H_2 \odot H_1 = H_1 \odot H_2.$$

Bukti – bukti :

1. (i) Misalkan H_1 dan H_2 merupakan K -subaljabar dari suatu K -aljabar

$(G, *, \odot, e)$, maka $e \in H_1$ dan

$e \in H_2$. Akibatnya $e \in H_1 \cap H_2$,

dengan kata lain $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$.

(ii) Diambil sebarang unsur $h_1, h_2 \in H_1 \cap H_2$. Karena

$h_1, h_2 \in H_1 \cap H_2$, maka $h_1, h_2 \in H_1$

dan $h_1, h_2 \in H_2$. Selanjutnya,

karena H_1, H_2 merupakan K -subaljabar dari $(G, *, \odot, e)$, maka

$h_1 \odot h_2 \in H_1$ dan $h_1 \odot h_2 \in H_2$.

Dengan demikian $h_1 \odot h_2 \in H_1 \cap H_2$.

Jadi terbukti bahwa $H_1 \cap H_2$

merupakan K -subaljabar dari

$(G, *, \odot, e)$.

2. (\Rightarrow) Misalkan $H_1 \odot H_2$ adalah K -subaljabar dari $(G, *, \odot, e)$,

dimana $H_1 \odot H_2$

$$= \left\{ h \mid h = h_1 \odot h_2, h_1 \in H_1 \text{ dan } h_2 \in H_2 \right\}$$

Akan ditunjukkan $H_2 \odot H_1 = H_1 \odot H_2$.

(i) Diambil sebarang unsur $h \in H_2 \odot H_1$,

maka $h = h_2 \odot h_1$ untuk suatu

$h_1 \in H_1$ dan $h_2 \in H_2$, sehingga

$$\begin{aligned} h &= h_2 \odot h_1 \\ &= e \odot (h_1 \odot h_2) \\ &= (h_1 \odot h_1) \odot (h_1 \odot h_2) \\ &= (h_1 \odot h_2^{-1} \odot h_1^{-1}) \odot h_1 \\ &= (h_1 * h_2 * h_1) * h_1^{-1} \\ &= (h_1 * h_2) * (h_1 * h_1^{-1}) \\ &= (h_1 * h_2) * e \\ &= (h_1 * h_2) \\ &= h_1 \odot h_2^{-1} \in H_1 \odot H_2 \end{aligned}$$

Karena $h_2 \in H_2$ dan $(H_2, *)$ grup, maka

$h_2^{-1} \in H_2$ sehingga $h_1 \odot h_2^{-1}$

$\in H_1 \odot H_2$. Dengan demikian

$$H_2 \odot H_1 \subset H_1 \odot H_2.$$

(ii) Diambil sebarang unsur $h \in H_1 \odot H_2$,

maka $h = h_1 \odot h_2$ untuk suatu

$h_1 \in H_1$ dan $h_2 \in H_2$, Sehingga :

$$\begin{aligned} h &= h_1 \odot h_2 \\ &= e \odot (h_2 \odot h_1) \\ &= (h_2 \odot h_2) \odot (h_2 \odot h_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (h_2 \odot h_1^{-1} \odot h_2^{-1}) \odot h_2 \\
 &= (h_2 * h_1 * h_2) * h_2^{-1} \\
 &= (h_2 * h_1) * (h_2 * h_2^{-1}) \\
 &= (h_2 * h_1) * e \\
 &= (h_2 * h_1) \\
 &= h_2 \odot h_1^{-1} \in H_2 \odot H_1
 \end{aligned}$$

Karena $h_1 \in H_1$ dan $(H_1, *)$ grup, maka

$$h_1^{-1} \in H_1 \quad \text{sehingga} \quad h_2 \odot h_1^{-1}$$

$$\in H_2 \odot H_1. \quad \text{Dengan} \quad \text{demikian}$$

$$H_1 \odot H_2 \subset H_2 \odot H_1. \quad \text{Dari (i) dan (ii)}$$

terbukti bahwa $H_2 \odot H_1 = H_1 \odot H_2$.

$$(\Leftarrow) \text{ Diketahui } H_2 \odot H_1 = H_1 \odot H_2.$$

Akan ditunjukkan $H_1 \odot H_2$ merupakan K -

subaljabar dari $(G, *, \odot, e)$.

$$(i) \quad H_1 \odot H_2 \neq \emptyset, \text{ karena } e \in H_1 \odot H_2,$$

$$\text{yaitu } e = e \odot e, \text{ dengan } e \in H_1,$$

$$e \in H_2.$$

$$(ii) \text{ Diambil sebarang unsur } x, y \in H_1 \odot H_2, \text{ maka}$$

$$x = x_1 \odot x_2 \text{ dan}$$

$$y = y_1 \odot y_2, \text{ dengan } x_1, y_1 \in H_1$$

$$\text{dan } x_2, y_2 \in H_2, \text{ sehingga :}$$

$$\begin{aligned}
 x \odot y &= (x_1 \odot x_2) \odot (y_1 \odot y_2) \\
 &= (x_1 \odot (e \odot y_2)) \odot (e \odot x_2) \odot y_1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (x_1 \odot y_2^{-1} \odot x_2^{-1}) \odot y_1 \\
 &= (x_1 * y_2 * x_2) * y_1^{-1} \\
 &= (x_1 * y_2) * (x_2 * y_1^{-1}) \\
 &= (x_1 \odot y_2^{-1}) * (y_1 * x_2^{-1})^{-1} \\
 &= (x_1 \odot y_2^{-1}) \odot (y_1 \odot x_2) \\
 &= (x_1 \odot y_2^{-1}) \odot (e \odot (x_2 \odot y_1)) \\
 &= (x_1 \odot y_1 \odot y_2) \odot x_2^{-1} \\
 &= (x_1 * y_1^{-1} * y_2^{-1}) * x_2 \\
 &= (x_1 * y_1^{-1}) * (y_2^{-1} * x_2) \\
 &= (x_1 * y_1^{-1}) * (x_2^{-1} * y_2)^{-1} \\
 &= (x_1 \odot y_1) * (x_2^{-1} \odot y_2^{-1})^{-1} \\
 &= (x_1 \odot y_1) \odot (x_2^{-1} \odot y_2^{-1}) \\
 &\in H_1 \odot H_2
 \end{aligned}$$

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa $H_1 \odot H_2$

merupakan K -subaljabar dari $(G, *, \odot, e)$. ■

Seperti halnya pada grup yang mempunyai konsep homomorfisma, K -aljabar yang dibangun atas grup juga mempunyai konsep homomorfisma yang disebut K -homomorfisma.

2.3 Homomorfisma K -aljabar

Berikut ini akan dibahas Homomorfisma K -aljabar dan sifat-sifat yang berlaku di dalamnya.

Definisi 2.3.1 [1] Misalkan K_1 dan K_2 merupakan K -aljabar. Suatu pemetaan ψ dari K_1 ke K_2 , dinotasikan dengan

$$\psi : K_1 \rightarrow K_2, \text{ disebut } K\text{-homomorfisma}$$

jika $\forall x_1, y_1 \in K_1$ berlaku

$$\psi(x_1 \odot y_1) = \psi(x_1) \odot \psi(y_1), \quad \text{dimana}$$

$$\psi(x_1), \psi(y_1) \in K_2.$$

Contoh 5

Misal (G, \odot) suatu K -aljabar, dibentuk

himpunan bagian $H = \{g \odot (g \odot x) : x \in G\}$, berdasarkan

Proposisi 2.2.1 [1] H merupakan K -subaljabar dari G . Selanjutnya

didefinisikan pemetaan $\psi : (G, \odot) \rightarrow (H, \odot)$, dengan

$$\psi(x) = g \odot (g \odot x), \forall x \in G. \quad \text{Akan}$$

ditunjukkan bahwa $\psi : (G, \odot) \rightarrow (H, \odot)$

merupakan suatu K -homomorfisma.

Bukti :

Diambil sebarang unsur $x, y \in G$, maka

$$x \odot y \in G \text{ dan}$$

$$\psi(x \odot y)$$

$$= g \odot (g \odot (x \odot y))$$

$$= (g \odot (e \odot (x \odot y))) \odot g$$

$$= (g \odot ((e \odot y) \odot (e \odot x))) \odot g$$

$$= (g \odot (g \odot x)) \odot (g \odot (g \odot y))$$

$$= \psi(x) \odot \psi(y)$$

Karena $\psi(x \odot y) = \psi(x) \odot \psi(y)$, maka

$\psi : (G, \odot) \rightarrow (H, \odot)$ merupakan suatu K -

homomorfisma.

Homomorfisma pada K -aljabar akan berakibat pada homomorfisma grup sebagaimana diberikan oleh akibat berikut:

Akibat 2.3.1 [1] Misalkan $K_1 = (G_1, *, \odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2, *, \odot, e_2)$

adalah K -aljabar serta $\psi : K_1 \rightarrow K_2$, suatu

K -homomorfisma, maka ψ juga

merupakan homomorfisma dari grup G_1 ke

G_2 .

Bukti :

Dipandang $(G_1, *)$ dan $(G_2, *)$ sebagai suatu

grup. Akan ditunjukkan pemetaan

$\psi : G_1 \rightarrow G_2$ merupakan homomorfisma

grup. Diambil sebarang unsur $x, y \in G_1$,

maka :

$$\psi(x * y) = \psi(x \odot y^{-1})$$

$$= \psi(x) \odot \psi(y^{-1})$$

$$= \psi(x) * [\psi(y^{-1})]^{-1}$$

$$= \psi(x) * [\psi(y)^{-1}]^{-1}$$

$$= \psi(x) * \psi(y)$$

Karena $\psi(x * y) = \psi(x) * \psi(y)$, maka ψ

juga merupakan homomorfisma dari G_1 ke

G_2 . ■

Berikut ini akan ditinjau sifat-sifat dari K -homomorfisma sebagaimana diberikan oleh proposisi berikut :

Proposisi 2.3.1 [1] Misalkan $K_1 = (G_1, *, \odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2, *, \odot, e_2)$

serta $\psi : K_1 \rightarrow K_2$, suatu K -homomorfisma. Jika K_1 suatu K -aljabar yang komutatif, maka $\forall x_1, x_2 \in K_1$ berlaku

1. $\psi(e_1) = e_2$.
2. $\psi(x) = \psi(x^{-1})$.
3. $\psi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \psi(x_1)$.
4. $\psi(x_1 \odot x_2) = e_2$ jika dan hanya jika $\psi(x_1) = \psi(x_2)$.
5. Jika H_1 adalah subaljabar dari K_1 maka $\psi(H_1)$ adalah subaljabar dari K_2 .

Bukti – bukti :

1. Misalkan ψ suatu K -homomorfisma dari K_1 ke K_2 , dimana e_1 dan e_1 berturut – turut menyatakan unsur identitas dari K_1 dan K_2 terhadap operasi biner \odot .

Diambil sebarang unsur $x \in K_1$, maka

$$x \odot e_1 = a \text{ dan}$$

$$\psi(x \odot e_1) = \psi(x) \dots (i)$$

Karena $\psi : K_1 \rightarrow K_2$ suatu K -homomorfisma, maka pers (i) menjadi

$$\psi(x) \odot \psi(e_1) = \psi(x) \dots (ii)$$

Selanjutnya, karena e_2

Adalah unsur di K_2 , maka

$$\psi(x) = \psi(x) \odot e_2 \dots (iii)$$

Sehingga dari (ii) dan (iii) diperoleh

$$\psi(x) \odot \psi(e_1) = \psi(x) = \psi(x) \odot e_2$$

Dengan demikian berakibat

$$\psi(e_1) = e_2.$$

2. Misalkan e_1 menyatakan unsur identitas dari K_1 . Akan ditunjukkan

$\psi(x) = \psi(x^{-1})$. Diambil sebarang unsur $x \in K_1$, maka $e \odot x = x^{-1}$.

Karena $e \odot x = x^{-1} \in K_1$ dan ψ suatu K -homomorfisma, maka :

$$\psi(e \odot x) = \psi(x^{-1}) \dots (i)$$

Selanjutnya menurut **Proposisi 2.1.2** menyatakan bahwa $e \odot x = x$.

Karena $e \odot x = x \in K_1$ dan ψ suatu K -homomorfisma, maka :

$$\psi(e \odot x) = \psi(x) \dots (ii)$$

Dari persamaan (i) dan (ii) diperoleh $\psi(x^{-1}) = \psi(x)$.

3. Misalkan e_1 menyatakan unsur identitas dari K_1 . Akan ditunjukkan

$\psi(e_1 \odot x_1) = e_2 \odot \psi(x_1)$. Diambil sebarang unsur $x_1 \in K_1$ maka

$$e_1 \odot x_1 \in K_1 \text{ dan berlaku}$$

$$\begin{aligned} \psi(e_1 \odot x_1) &= \psi(e_1) \odot \psi(x_1) \\ &= e_2 \odot \psi(x_1). \end{aligned}$$

4. (\Rightarrow) Diketahui $\psi(x_1 \odot x_2) = e_2$.

Akan ditunjukkan $\psi(x_1) = \psi(x_2)$.

Diambil sebarang unsur $x_1, x_2 \in K_1$.

Karena $x_1, x_2 \in K_1$ maka

$$x_1 \odot x_2 \in K_1$$

dan berlaku :

$$\psi(x_1 \odot x_2) = e_2$$

$$\psi(x_1 \odot x_2) \odot \psi(x_2^{-1}) = e_2 \odot \psi(x_2^{-1})$$

$$\psi[(x_1 \odot x_2) \odot x_2^{-1}] = e_2 \odot \psi(x_2^{-1})$$

$$\psi[(x_1 * x_2^{-1}) * x_2] = [\psi(x_2^{-1})]^{-1}$$

$$\psi[x_1 * (x_2^{-1} * x_2)] = [\psi(x_2^{-1})]^{-1}$$

$$\psi[x_1 * e_1] = [\psi(x_2^{-1})]^{-1}$$

$$\psi(x_1) = \psi(x_2)$$

(\Leftarrow) Diketahui $\psi(x_1) = \psi(x_2)$, akan

ditunjukkan $\psi(x_1 \odot x_2) = e_2$.

Diambil sebarang unsur $x_1, x_2 \in K_1$.

Karena $x_1, x_2 \in K_1$ maka $x_1 \odot x_2 \in K_1$

dan berlaku :

$$\psi(x_1 \odot x_2) = \psi(x_1) \odot \psi(x_2)$$

$$= \psi(x_1) \odot \psi(x_1)$$

$$= \psi(x_1 \odot x_1)$$

$$= \psi(e_1)$$

$$= e_2$$

5. Misalkan H_1 merupakan subaljabar dari K_1 . Akan ditunjukkan bahwa $\psi(H_1)$ adalah subaljabar dari K_2 .

(i). $H_1 \neq \emptyset$ karena setidaknya H_1 memuat elemen identitas yaitu $e_1 \in H_1$

maka $\psi(e_1) = e_2 \in \psi(H_1)$. Dengan

kata lain $\psi(H_1) \neq \emptyset$.

(ii). Diambil sebarang unsur

$y_1, y_2 \in \psi(H_1)$, maka terdapat

$x_1, x_2 \in H_1$ sedemikian sehingga

$\psi(x_1) = y_1, \psi(x_2) = y_2$, dan

$$y_1 \odot y_2 = \psi(x_1) \odot \psi(x_2)$$

$$= \psi(x_1 \odot x_2) \in \psi(H_1),$$

karena $x_1 \odot x_2 \in H_1$ ■

Akibat 2.3.2 [1] Misalkan $\psi : K_1 \rightarrow K_2$

suatu K -homomorfisma, maka

$\forall x_1, y_1 \in K_1$ berlaku :

$$1. \psi(x_1 \odot y_1) = \psi(y_1 \odot x_1)$$

$$2. \psi(x_1) = \psi(e_1 \odot x_1)$$

Bukti - bukti :

1. Misal e_1 adalah unsur identitas dari K_1 .

Diambil sebarang unsur $x_1, y_1 \in K_1$

maka $y_1 \odot x_1 \in K_1$ dan $x_1 \odot y_1 \in K_1$.

Dengan demikian

$$e_1 \odot (x_1 \odot y_1) \in K_1. \text{ Menurut}$$

Proposisi 2.1.3 berlaku
 $e_1 \odot (x_1 \odot y_1) = y_1 \odot x_1$

$$\psi[e_1 \odot (x_1 \odot y_1)] = \psi(y_1 \odot x_1)$$

$$\psi[(e_1 \odot x_1) \odot (e_1 \odot y_1)] = \psi(y_1 \odot x_1)$$

$$\psi(x_1^{-1} \odot y_1^{-1}) = \psi(y_1 \odot x_1)$$

$$\psi(x_1^{-1}) \odot \psi(y_1^{-1}) = \psi(y_1 \odot x_1)$$

$$\psi(x_1) \odot \psi(y_1) = \psi(y_1 \odot x_1)$$

$$\psi(x_1 \odot y_1) = \psi(y_1 \odot x_1)$$

2. Misal e_1 adalah unsur identitas dari K_1 .

Diambil sebarang unsur $x_1 \in K_1$, maka

$$e_1 \odot x_1 \in K_1 \text{ dengan } e_1 \odot x_1 = x_1^{-1}.$$

$$\psi(e_1 \odot x_1) = \psi(x_1^{-1})$$

$$\psi(e_1 \odot x_1) = \psi(x_1) \quad \blacksquare$$

Selanjutnya akan diberikan definisi dan contoh dari kernel ψ .

Definisi 2.3.2 [1] Misalkan $K_1 = (G_1, *, \odot, e_1)$ dan $K_2 = (G_2, *, \odot, e_2)$

merupakan K -aljabar dan $\psi : K_1 \rightarrow K_2$

suatu homomorfisma. Himpunan bagian dari K_1 yaitu

$$\ker(\psi) = \{x \in K_1 : \psi(x) = e_2\} \text{ disebut}$$

kernel dari ψ .

Contoh 6

Berdasarkan Contoh 5 diketahui (G, \odot)

merupakan K -aljabar dan

(H, \odot) merupakan K -subaljabar dari

(G, \odot) serta $\psi : (G, \odot) \rightarrow (H, \odot)$ suatu K -

homomorfisma dengan

$$\psi(x) = g \odot (g \odot x), \forall x \in G. \quad \text{Akan}$$

dicari kernel dari ψ . Diambil sebarang

unsur $x \in G$, terdapat 2 kemungkinan yaitu

$x = e_1$ atau $x \neq e_1$.

1) Untuk $x = e_1$

$$\psi(e_1) = g \odot (g \odot e_1)$$

$$= g \odot g$$

$$= e_2$$

2) Untuk $x \neq e_1$

$$\psi(x) = g \odot (g \odot x)$$

$$= g * (g * x^{-1})^{-1}$$

$$= g * (x * g^{-1}) \neq e_2$$

Karena untuk $x = e_1$, $\psi(e_1) = e_2$ maka

$$\ker(\psi) = \{e_1\}.$$

Selanjutnya akan ditinjau keterkaitan antara $\ker(\psi)$ dengan relasi

ekuivalensi yang didefinisikan pada K -

aljabar. Misalkan $\psi : K_1 \rightarrow K_2$ suatu

homomorfisma, maka

$$\text{Ker}(\psi) = \{x \in K_1 | \psi(x) = e_2\}.$$

Didefinisikan relasi " \sim " pada K_1 dengan

$x \sim y$ jika hanya jika

$$x \odot y \in \ker(\psi), \forall x, y \in K_1.$$

Teorema 3.3.2 [1] Misalkan K_1 suatu K -aljabar. Jika pada K_1 didefinisikan sebuah relasi " \sim " dengan $x \sim y$ jika hanya jika $x \odot y \in \ker(\psi), \forall x, y \in K_1$, maka relasi " \sim " merupakan relasi ekuivalensi.

Bukti :

Misal pada K_1 didefinisikan relasi " \sim " dengan $x \sim y$ jika hanya jika $x \odot y \in \ker(\psi), \forall x, y \in K_1$. Akan ditunjukkan relasi " \sim " merupakan relasi ekuivalensi, yaitu akan ditunjukkan relasi \sim memenuhi sifat refleksif, simetris, dan transitif.

1). Diambil sebarang unsur $x \in K_1$ maka

$$x \odot x = e_1 \in K_1 \quad \text{dan}$$

$$\psi(x \odot x) = \psi(e_1) = e_2, \quad \text{sehingga}$$

$$x \odot x \in \ker(\psi), \text{ yaitu } x \sim x. \text{ Dengan}$$

kata lain relasi \sim bersifat refleksif.

2). Diambil sebarang unsur $x, y \in K_1$ dan

$$x \sim y, \text{ maka } x \odot y \in \ker(\psi) \text{ sehingga}$$

$$\psi(x \odot y) = e_2. \text{ Karena } \psi : K_1 \rightarrow K_2$$

suatu homomorfisma, maka menurut Akibat 2.3.2, berlaku $\forall x, y \in K_1$

$$\text{berlaku } \psi(x \odot y) = \psi(y \odot x).$$

Dengan demikian $(y \odot x) = e_2$, maka

$y \odot x \in \ker(\psi)$ yaitu $y \sim x$, akibatnya relasi \sim bersifat simetris.

3). Diambil sebarang unsur $x, y, z \in K_1$

dan $x \sim y, y \sim z$. Akan ditunjukkan $x \sim z$.

Karena $x \sim y$ dan $y \sim z$, maka

$$x \odot y \in \ker(\psi) \text{ dan } y \odot z \in \ker(\psi).$$

$$\text{Sehingga } \psi(x \odot y) = e_2$$

$$\text{dan } \psi(y \odot z) = e_2. \quad \text{Selanjutnya,}$$

karena $x \odot y \in K_1$ dan $y \odot z \in K_1$

maka $(x \odot y) \odot (y \odot z) \in K_1$ dan

$$\psi((x \odot y) \odot (y \odot z))$$

$$= \psi(x \odot y) \odot \psi(y \odot z)$$

$$= e_2 \odot e_2$$

$$= e_2 \quad \dots (i)$$

Disisi lain

$$\psi((x \odot y) \odot (y \odot z)) = \psi(x \odot z) \dots (ii)$$

Dari (i) dan (ii) didapat $\psi(x \odot z) = e_2$.

Sehingga $x \odot z \in \ker(\psi)$, yaitu $x \sim z$.

Dengan kata lain relasi \sim bersifat transitif.

Dari (1), (2), dan (3) terbukti bahwa relasi " \sim " merupakan relasi ekuivalensi

pada K_1 .

3. PENUTUP

Dari pembahasan yang telah diuraikan, dapat diambil beberapa hal sebagai berikut :

1. Misalkan $(G, *)$ suatu grup dengan unsur identitas e . Jika pada G dilengkapi operasi \odot yang didefinisikan oleh $\forall x, y \in G, x \odot y = x * y^{-1}$ sedemikian hingga operasi \odot merupakan operasi biner pada G dan memenuhi aksioma-aksioma tertentu maka $(G, *, \odot, e)$ akan membentuk struktur aljabar baru yang disebut K -aljabar.
2. Dari suatu K -aljabar dapat dibentuk himpunan bagian yang memiliki sifat K -aljabar terhadap operasi biner yang sama yang dinamakan K -subaljabar
3. Sebagaimana pada grup yang terdapat konsep homomorfisma grup, pada K -aljabar juga terdapat konsep homomorfisma yang dinamakan K -homomorfisma.
4. Sifat-sifat yang berlaku pada grup, akan berlaku juga pada K -aljabar.

4. DAFTAR PUSTAKA

- [1] K.H Dar Akram, (2007), *On K-Homomorphisms of K-Algebras*, University of the Punjab, International Mathematical Forum. Ser, 46.
- [2] K. H Dar Akram, (2006), *On Subclass of K(G)-algebra*, Annals of University of Cariova, Math. Comp. Sci. Ser, 33.